

ریاضی رنگین کمان

چکیده

در این مقاله، این سؤال که «چرا در یک قطره کروی آب، رنگین کمان را فقط بین زوایای ۴۰ تا ۴۲ درجه می‌توان دید؟» مورد بررسی قرار گرفته است.

وقتی یک شعاع نور خورشید از هوا وارد قطره آب می‌شود، مقداری از این نور از روی قطره بازتاب می‌کند، مقداری نیز بعد از ورود به قطره از پشت آن خارج می‌شود، و مقداری هم در درون قطره، طبق «قانون اسنل» شکست می‌خورد و از قطره خارج می‌گردد و تشکیل رنگین کمان می‌دهد. در تشکیل رنگین کمان دو عامل اصلی «ضریب شکست نور» و «طول موج» نقش مهمی دارند و علت اصلی تشکیل رنگ‌های مختلف در رنگین کمان هستند. هر قطره آب می‌تواند یک رنگ از رنگ‌های رنگین کمان را در محدوده دید انسان ایجاد کند. در این پژوهش علت کمانی بودن رنگین کمان نیز گفته شده است.

ما بعد از بررسی و اثبات فرمول‌های ریاضی به این نتیجه رسیدیم که شدت نور خروجی در تمام زوایا یکسان نیست و بیشتر نور رنگینی که از قطره بیرون می‌رود، با جهت تابش خورشید، زاویه حدود ۴۲ درجه می‌سازد. البته این زاویه به رنگ پرتو بستگی دارد و بین زاویه ۴۰ تا ۴۲ درجه برای رنگ‌های قرمز تا بنفش متفاوت است.



مریم شفیعی
مدرس انجمن ریاضی
پژوهش‌سرای دانش‌آموزی
محمدبن زکریای رازی
محدثه تاجیک
دانش‌آموز عضو انجمن
ریاضی پژوهش‌سرای
دانش‌آموزی محمدبن
زکریای رازی شهری

کلیدواژه‌ها: رنگین کمان، قانون اسنل، طول موج، طیف‌های نور مرئی (همان اتفاقی که در منشور روی می‌دهد) و بازتاب درون قطره، از آن خارج می‌شوند.

اگرچه معروف است که رنگین کمان هفت رنگ

دارد اما این یک اشتباہی تاریخی است. وقتی آیزاك نیوتن^۱ برای نخستین بار پرتوهای خورشید را از درون منشور عبور داد و طیف تجزیه شده نور را به دست آورد، شش رنگ را دید، اما از آنجا که در آن روزگار هفت عدد مقدسی بود، ترجیح داد رنگ نیلی را بین بنفش و آبی قرار دهد و با هفت رنگ ساختن طیف نور، توجه عمومی بیشتری را متوجه این پدیده سازد.

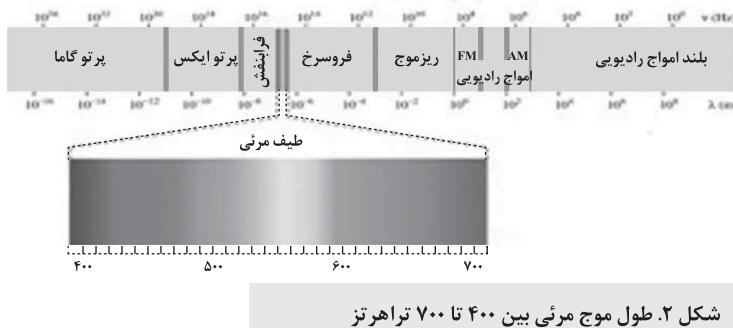
شکست نور.

مقدمه

یکی از نمایش‌های نور در آسمان رنگین کمان است. رنگین کمان همان نور خورشید است که تحت تأثیر قطرات باران به رنگ‌های خودش منتشر می‌شود و به چشم بیننده می‌رسد. این پدیده هنگامی روی می‌دهد که پرتوهای سفیدرنگ خورشید در ارتفاع بالا به قطرات کروی شکل باران برخورد می‌کنند و با تجزیه شدن به

**وقتی که نور با
قطره کروی آب
برخورد می‌کند،
مقداری از آن نور
با زتاب می‌کند و
بقیه آن شکست
می‌خورد و در
طول قطره حرکت
می‌کند تا به سطح
خمیده داخلی و
آینه‌مانند قطره
برخورد کند**

در حقیقت در رنگین کمان طیف پیوسته‌ای از تمامی رنگ‌ها از بنفس تا قرمز در گستره دید انسان قرار می‌گیرد. رنگ‌های رنگین کمان ناشی از دو واقعیت اساسی‌اند: اول اینکه پرتو نور خورشید متشكل از دامنه همه رنگ‌های قابل دید در گستره بینایی انسان است. رنگ‌های نور خورشید زمانی که با یکدیگر ترکیب می‌شوند، سفید به‌نظر می‌رسند. این خاصیت نور خورشید نخستین بار توسط نیوتن در سال ۱۶۶۶ تشریح شد. طیف مرئی نام بخشی از طیف الکترومغناطیسی است که با چشم انسان قابل رؤیت و تشخیص است. طول موج‌های طیف مرئی بین ۴۰۰ تا ۷۵۰ نانومتر و فرکانس آن‌ها بین ۴۰۰ تا ۷۰۰ ترا هرتز است. (سگل، موکول، ۱۳۷۶)



شکل ۲. طول موج مرئی بین ۴۰۰ تا ۷۰۰ ترا هرتز

نکته دیگر اینکه، نورهای رنگی مختلف، زمانی که از یک محیط مانند هوا به محیط دیگری مانند آب یا شیشه عبور می‌کنند، به میزان متفاوتی انتشار می‌یابند. انواع رنگین کمان‌ها عبارت‌انداز:

- **رنگین کمان دوگانه:** در اثر دو بازتاب و دو شکست در قطره آب ایجاد می‌شود که باعث می‌شود دو کمان به وجود آید و کمان اول رنگش عکس کمان بعدی است.

- **رنگین کمان با کمان‌های اضافه:** وقتی نورها خارج می‌شوند، اگر با هم تداخل داشته باشند، براساس اینکه تداخل‌ها سازنده یا ویرانگر باشند، یک سلسله کمان‌های اضافه که ممکن است خود رنگ‌های رنگین کمان نباشند، به وجود می‌آیند.

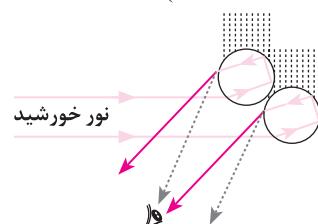
- **رنگین کمان قمری:** ماه کامل نور کافی برای تشکیل رنگین کمان دارد و رنگین کمان قمری به وجود می‌آورد. ولی چون نور ماه از خورشید خیلی کمتر است، نور رنگین کمان آن هم کمتر است (Jearl Walker, 1980).

رنگین کمان وجود خارجی ندارد؛ یعنی مانع توفیق رنگین کمانی را بگیرید، یا پرده‌ای برای نمایش آن برپا کنیم، یا در محل آن فیلم عکاسی قرار دهیم و اثرش را روی فیلم ثبت کنیم. هرقدر تلاش کنیم به رنگین کمان نزدیک شویم، رنگین کمان نیز به همان اندازه از ما دورتر می‌شود و همیشه در فاصله‌ای ثابت از ما باقی می‌ماند. به همین دلیل است که تاکنون کسی موفق نشده است رنگین کمان را به دام بیندازد.

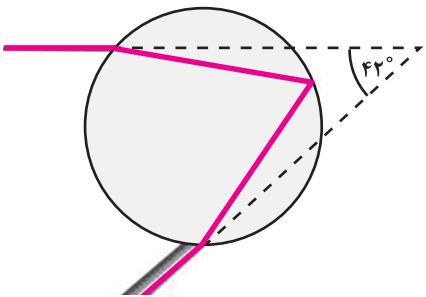
اولین بار رنه دکارت آزمایشی انجام داد تا یک رنگین کمان بزرگ بسازد. او سه اصل را در نظر گرفت: ۱. فقط هنگام تشکیل باران رنگین کمان به وجود نمی‌آید و هرجا که قطرات ریز آب باشد، می‌توانیم رنگین کمان تشکیل دهیم.

۲. قطرات به‌طور تقریبی گرد و کروی هستند.
۳. کوچک‌تر یا بزرگ‌تر بودن قطره‌ها تأثیری در ظاهر رنگین کمان ندارد.

وقتی که نور با قطره کروی آب برخورد می‌کند، مقداری از آن نور بازتاب می‌کند و بقیه آن شکست می‌خورد و در طول قطره حرکت می‌کند تا به سطح خمیده داخلی و آینه‌مانند قطره برخورد کند. در هر برخورد با سطح داخلی قطره، مقداری از نور باز می‌تابد و در قطره می‌ماند، و باقی مانده آن خارج می‌شود. بنابراین، پرتوهای نور می‌توانند بعد از یک، دو و سه بازتاب داخلی یا بیشتر با شکست دیگری از قطره خارج شوند. با وجود این، نوری که به پشت قطره برخورد می‌کند، دستخوش بازتاب کلی نمی‌شود و مقداری از نور از پشت قطره خارج می‌شود. اما نوری که از پشت قطره باران خارج شده رنگین کمان تشکیل نمی‌دهد، زیرا طیف تابشی از پشت قطره مانند رنگین کمان مرئی دارای شرایط تشکیل رنگین کمان نیست. از این‌رو رنگ‌ها بیشتر از آنکه رنگین کمان تشکیل دهند، با هم ترکیب می‌شوند (H. Nussenzveig, 1977).



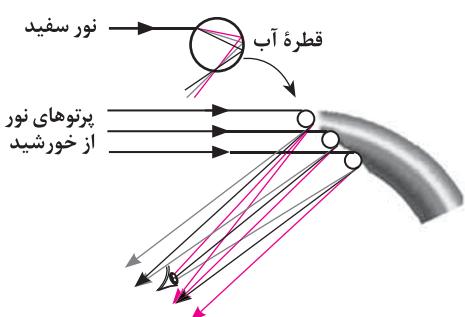
شکل ۱. شکل فرضی پرتو نور تابیده شده به قطره نور خورشید



شکل ۴. شکست نور قرمز تا بنفش

زمانی که رنگین کمان و دسته رنگ‌های آن را مشاهده می‌کنیم، به نوری نگاه کرده‌ایم که از قطرات متفاوت آب پراکنده و بازتابیده شده است. هر قطرة آب می‌تواند یک رنگ از رنگین کمان را در محدوده دید ما ایجاد کند. مثلاً اگر نور قرمز خارج شده از یک قطره توسط ناظری مشاهده شود، نور آبی از آن قطره دیده نمی‌شود. بنابراین طبق شکل ۵ می‌توان گفت ناظر نور قرمز را از قطره بالایی، زرد را از قطره میانی و آبی را بنفش را از قطره پایینی می‌بیند. بهمین خاطر بالای رنگین کمان قرمز و پایین آن بنفش دیده می‌شود (R. A. R. Tricker, 1970 & H. Nussenzveig,

.1977)



شکل ۵. نمایش رنگ‌های رنگین کمان توسط قطرات کروی آب

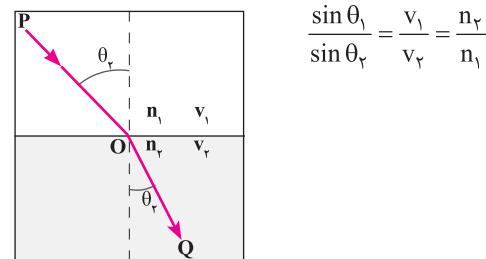
با علم به اینکه ضریب شکست نور در آب $1/33$ یا $1/34$ است، طیف بازتابیده در محدوده زوایای 40° تا 42° درجه است (این مطلب با فرمول‌های ریاضی اثبات می‌شود). این زاویه به بزرگی و کوچکی قطره آب ربطی ندارد، اما خالص بودن رنگ‌های رنگین کمان به اندازه قطرات باران بستگی دارد. قطرات درشت (در حدود قطره‌های چند میلی‌متری) رنگین کمان‌های روشن با رنگ‌های تفکیک شده و زیبا می‌دهند. قطرات ریز باران

بحث و نتیجه‌گیری

رنگین کمان در واقع در محل مشخصی از آسمان وجود ندارد. محل ظاهر شدنش به محل ناظر و موقعیت خورشید بستگی دارد. تمام قطرات باران نور خورشید را به طور یکسان می‌شکنند و باز می‌تابانند، اما فقط نور از بعضی از قطرات باران به چشم ناظر می‌رسد. شکست نور در قطره آب مهم‌ترین عامل ایجاد رنگین کمان است. مقدار شکست نور به طور کلی به دو عامل طول موج و محیطی که نور وارد آن می‌شود، بستگی دارد. هنگامی که نور از محیطی وارد محیط دیگری می‌شود که نور در آن دارای سرعت متفاوتی است، زاویه شعاع نور در خط فاصل این دو محیط تغییر می‌کند و به اصطلاح می‌شکند (www.tebyan.net، شکست نور).

ویلبرورد استنل⁴ در قانون شکست خود محاسبه کرد که نور چگونه زمانی که از یک محیط به محیط دیگری که چگالی متفاوتی دارد، گذر می‌کند خم یا پراکنده می‌شود (مانند گذر نور از هوا به محیط آب). در واقع این قانون رابطه میان زاویه نور را قبل از برخورد و پس از شکست در خط فاصل دو محیط نشان می‌دهد (fa.wikipedia و قانون استنل).

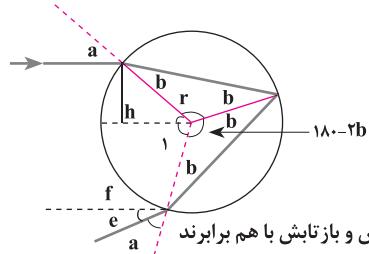
رنگین کمان‌ها
دایره‌های
متعددالمرکزی
هستند که چون
زمین حرکت
می‌کند، ما
نمی‌توانیم کل
رنگین کمان را
مشاهده کنیم و
 فقط کمانی از آن
رامی‌بینیم



شکل ۳. قانون شکست استنل

زمانی که مسیر پرتو نور درون قطره آب را برای نورهای قرمز و بنفش بررسی می‌کنیم، در می‌باییم که زاویه انحراف برای این دو رنگ متفاوت است. نور بنفش که طول موج کوتاه‌تری دارد، با زاویه بزرگ‌تری نسبت به نور قرمز که طول موج بزرگ‌تری دارد می‌شکند و هنگام خروج از قطره به‌واسطه بازتاب پرتوهای نور از پشت قطره، نور بنفش نسبت به نور قرمز با زاویه کمتری نسبت به نور سفید تابیده شده اصلی می‌چرخد و به چشم ناظر می‌رسد. بهمین علت بالای رنگین کمان قرمز و پایین آن بنفش دیده می‌شود (C. Boyer, 1987).

خطوط اضافی را در دایرة فرضی که به عنوان قطره باران است، نظیر ارتفاع، شعاع دایره، زاویه تابش، زاویه شکست و زاویه بازتابش داشته باشیم.



شکل ۷. زوایا و خطوط فرضی در قطره آب

a = زاویه برخورد نور

b = زاویه شکست نور

r = شعاع قطره آب

h = زاویه بین خطچین و شعاع a ، r است.

e = زاویه دید برای دیدن رنگ‌های رنگین‌کمان توسط ناظر (هدف، به دست آوردن این زاویه است).

h = ارتفاع نقطه‌ای که اشعه نور به قطره برخورد می‌کند. نکته: بین زاویه تابش و دو شعاع دایره، مثلث متساوی‌الساقین تشکیل می‌شود و زاویه‌های b برابرند. همچنین، بعد از برخورد شعاع نور و برگشت آن، دوباره مثلث متساوی‌الساقین داریم که در آن زاویه‌های b با هم برابرند. مجموع زوایای مرکز دایره 360° درجه است، پس داریم:

$$f + a + (180^\circ - 2b) + (180^\circ - 2b) = 360^\circ$$

$$f + a + 360^\circ - 4b = 360^\circ \rightarrow f = 4b - a$$

از طرف دیگر داریم:

$$f = e + a \rightarrow e = f - a \rightarrow e = 4b - a - a$$

فرمول اصلی: $e = 4b - 2a$

از فرمول به دست آمده نسبت به a مشتق می‌گیریم

و مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{de}{da} = 4 \frac{db}{da} - 2 \frac{da}{da} \rightarrow \frac{de}{da} = -2 + 4 \frac{db}{da}$$

$$\frac{de}{da} = -2 + 4 \frac{db}{da} = 0 \rightarrow 4 \frac{db}{da} = 2 \rightarrow \frac{db}{da} = \frac{1}{2}$$

قانون شکست اسنل در نقطه a (محل برخورد شعاع نور به قطره):

$$n_1 \sin a = n_2 \sin b$$

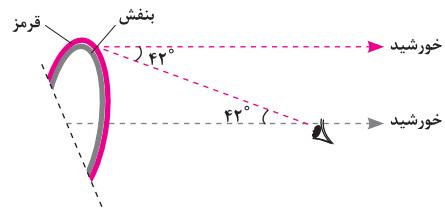
چون محیط اول هواست، ضریب شکست نور در هوا

$$n_1 = 1$$

$$\sin a = n \sin b$$

(در حدود قطرهای $1/0$ میلی‌متر) رنگین‌کمان‌هایی با رنگ‌های درهم پوشانیده شده ایجاد می‌کنند و غالباً نزدیک به رنگ سفید و شفاف دیده می‌شوند (Jearl Walker, 1980)

رنگین‌کمان‌ها دایره‌های متحدم‌مرکزی هستند که چون زمین حرکت می‌کند، مانعی توفیق کل رنگین‌کمان را مشاهده کنیم و فقط کمانی از آن را می‌بینیم. هرچه خورشید در پایین‌ترین قسمت افق قرار داشته باشد، رنگین‌کمان ما کامل‌تر می‌شود. برای موقعیت این پدیده، خورشید، چشم ناظر و وسط قوس رنگین‌کمان باید هر سه در یک امتداد مستقیم قرار گرفته باشند. پس اگر خورشید در آسمان خیلی بالا باشد، هرگز چنین خط مستقیمی درست نمی‌شود. به همین علت رنگین‌کمان را تنها صحیح زود و یا موقع عصر می‌توان دید. برای اینکه فردی بتواند رنگین‌کمان را بینید، باید پشت به خورشید و رو به باران بایستد تا پرتوهای تجزیه شده و بازگشته رنگین‌کمان را مشاهده کند (H. Nussenzveig, 1977).



شکل ۶. حدود زوایا و جهت قرار گرفتن ناظر برای دیدن رنگین‌کمان

در این حالت فرد پرتوهایی در شش رنگ قرمز، نارنجی، زرد، سبز، آبی و بنفش را می‌بیند که با تقارن کروی به چشم او می‌رسند. چشم با امتداد دادن این پرتوها، کمان‌هایی شش رنگ را در آسمان تداعی می‌کند که همان رنگین‌کمان است.

اثبات و بیزگی رنگین‌کمان از طریق دستورهای ریاضی

به منظور محاسبه زاویه رنگین‌کمان می‌توانیم از قانون اسنل و شکست استفاده کنیم، بلکه باید از روابط جبری و مثلثاتی چون سینوس و مشتق نیز کمک بگیریم. در این قسمت ما فقط محاسبات مربوط به رنگین‌کمان اصلی را انجام می‌دهیم (www.phys.uwosh.edu).

در محاسبه زاویه رنگین‌کمان ما باید بعضی از

$$e = 4 \operatorname{Arc} \sin \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} - 2 \operatorname{Arc} \sin \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$$

اگر ضریب شکست نور در آب را $1/33$ بگیریم، خواهیم داشت:

$$e = 4 \operatorname{Arc} \sin \frac{0/8623}{1/33} - 2 \operatorname{Arc} \sin \frac{0/8623}{1/33}$$

$$e \approx 42/3^\circ \quad (\text{برای نور قرمز})$$

اگر ضریب شکست نور در آب را $1/34$ بگیریم، خواهیم داشت:

$$e = 4 \operatorname{Arc} \sin \frac{0/7348}{1/34} - 2 \operatorname{Arc} \sin \frac{0/7348}{1/34}$$

$$e \approx 40/6^\circ \quad (\text{برای نور بنفش})$$

به عبارت دیگر از این محاسبات می‌توان نتیجه

گرفت که شدت نور خروجی در تمام زوایای یکسان نیست و بیشتر نور رنگینی که از قطره بیرون می‌رود، با جهت تابش خورشید زاویه حدود 42 درجه می‌سازد. البته این زاویه به رنگ پرتو بستگی دارد و بین 40 تا 42 درجه برای رنگ‌های قرمز تا بنفش متفاوت است. بنابراین می‌توان تصور کرد که تنها در زوایای حدود 42 درجه، پرتوهای رنگی به طور مؤثر از قطره خارج می‌شوند.

*پی‌نوشت‌ها

1. Isaac Newton
 2. René Descartes
 3. ترا هرتز برابر 10^{13} هرتز (هرتز یکای سنجش طول موج در سیستم SI است)
 4. Snell
- منابع ***
1. سُگل، موکول (۱۳۷۶). آشنایی با نور و لیزر. ترجمه پریچهر همایون‌روز. نشر ذکر، کتاب‌های قاسدک. تهران.
 2. C. Boyer (1987). The rainbow: from myth to mathematics. Princeton University Press.
 3. R. A. R. Tricker (1970). Introduction to meteorological optics. American Elsevier.
 4. H. Nussenzveig (1977). The theory of the rainbow, Scientific American, April.
 5. www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-rainbows.
 6. www.phys.uwosh.edu/rioux/genphysii/pdf/rainbows.pdf
 7. Fraser, Alistair B. (1972). "Inhomogeneities in the Color and Intensity of the Rainbow", Journal of Atmospheric Sciences, 29, 211.
 8. Greenler, Robert, Halos, and Glories (1980). Rainbows, Cambridge University Press.
 9. Humphreys, W. J., (1929). Physics of the Air. McGraw- Hill Book Co.
 10. Humphreys, W. J., Weather (1923). Proverbs and Paradoxes. Williams and Wilkins Company.
 11. wikipedia.org/wiki/
 12. www.konjav.com
 13. fa.wikipedia.org
 14. www.tebyan.net
 15. www.youtube.com
 16. www.phys.uwosh.edu
 17. danesh.roshd.ir

از قانون شکست اسنل نسبت به a مشتق می‌گیریم:

$$\cos a = n \cos b \frac{\frac{db}{da} = 1}{da} \rightarrow \cos a = \frac{n \cos b}{2}$$

می‌دانیم:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

در فرمول به دست آمده بالا جایگزین می‌کنیم:

$$\sqrt{1 - \sin^2 a} = \frac{n}{2} \sqrt{1 - \sin^2 b}$$

$$1 - \sin^2 a = \frac{n^2}{4} (1 - \sin^2 b) *$$

تنها در زوایای حدود 42 درجه، پرتوهای رنگی به طور مؤثر از قطره خارج می‌شوند

❖ قانون شکست اسنل در نقطه b (محل خروج شعاع نور از قطره):

$$n_s \sin b = n_i \sin a$$

این بار محیط اول آب و محیط دوم هواست، پس:

$$n_i = 1$$

$$\sin b = \frac{\sin a}{n} \rightarrow b = \operatorname{Arc} \sin \left(\frac{\sin a}{n} \right)$$

از این فرمول دو نتیجه می‌گیریم:

● از فرمول $\operatorname{Arc} \sin$ می‌گیریم تا در فرمول نهایی جایگزین کنیم:

$$\sin b = \frac{\sin a}{n} \rightarrow b = \operatorname{Arc} \sin \left(\frac{\sin a}{n} \right)$$

● طرفین را به توان 2 می‌رسانیم و به جای $\sin^2 b$ معادل آن را در فرمولی که با * نشان داده شده است، قرار می‌دهیم:

$$\sin^2 b = \frac{\sin^2 a}{n^2}$$

$$1 - \sin^2 b = \frac{n^2}{4} \left(1 - \frac{\sin^2 a}{n^2} \right)$$

$$1 - \frac{n^2}{4} \sin^2 a = n^2 - \sin^2 a$$

$$n^2 - \sin^2 a = \frac{n^2}{4} \sin^2 a - \sin^2 a$$

$$n^2 - \frac{n^2}{3} \sin^2 a \rightarrow \sin^2 a = \frac{n^2}{3}$$

$$\sin a = \sqrt{\frac{n^2}{3}} \rightarrow a = \operatorname{Arc} \sin \sqrt{\frac{n^2}{3}}$$

$$e = 4b - 2a \rightarrow e = 4 \operatorname{Arc} \sin \left(\frac{\sin a}{n} \right) - 2 \operatorname{Arc} \sin a$$

اگر به جای $\sin a$ مقدار به دست آمده را قرار دهیم، فرمول نهایی به صورت زیر به دست می‌آید: